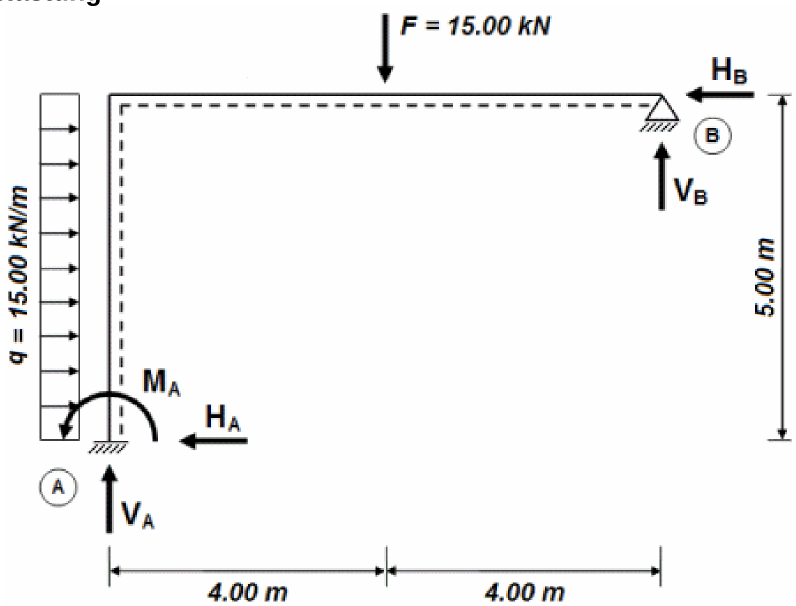
(Ein-) Gelenkrahmen unter horizontaler Streckenlast sowie vertikaler Einzellast

Auf den folgenden Seiten wird das '**Kraftgrößenverfahren**' (X_A-Methode) zur Berechnung der Schnittkräfte statischer Systeme am Beispiel eines 2-fach statisch unbestimmten Rahmens veranschaulicht. Dabei gliedert sich die Berechnung in folgende Schritte:

- Systemanalyse: Ermittlung des Grades der statischen Unbestimmtheit
- Herstellen eines statisch bestimmten Grundsystems
- Lastspannungszustand: Antragen der Belastung am Ersatzsystem und Ermittlung der Schnittkräfte
- Eigenspannungszustand: Ermittlung der Schnittgrößen, die durch die Ersatzkräfte hervorgerufen werden
- Berechnung der Verformung infolge des Last- und Eigenspannungszustandes
- Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems
- Ermittlung der endgültigen Zustandslinien durch Superposition

System und Belastung



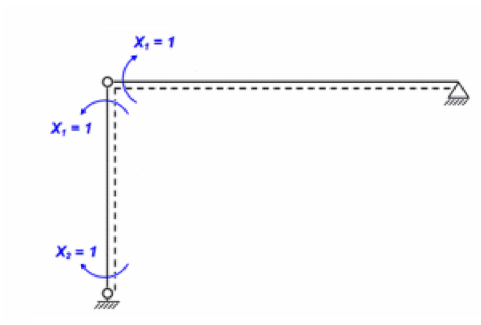
Systemanalyse

Auflagerreaktionen	a = 5	
Stabelemente	p = 2	$n = 5 + 3 * (2 - 3) - 0 \Leftrightarrow$ **n = 2**
Knotenpunkte	k = 3	
Nebenbedingungen	r = 0	

(Ein-) Gelenkrahmen unter horizontaler Streckenlast sowie vertikaler Einzellast

Statisch bestimmtes Grundsystem

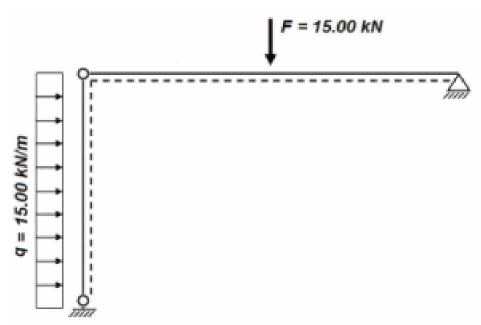
Zur Berechnung eines n-fach statisch unbestimmten Systems sind n Verformungsbedingungen notwendig. Diese Bedingungen lassen sich durch Wegnahme von Auflagern oder Einführung von Gelenken formulieren. Das System wird in ein statisch bestimmtes Ersatzsystem umgewandelt. An den Stellen der entfernten Lager oder der eingeführten Gelenke werden die am Ursprungssystem wirkenden Kräfte (Einheitskräfte) angesetzt.



Das statisch bestimmte Ersatzsystem sollte so gewählt werden, dass sich die Schnittkraftermittlung leicht gestaltet und zu Schnittkraftlinien führt, die eine möglichst geringe Integrationsarbeit bei der Verformungsberechnung ergibt.

An der **Rahmenecke** sowie am **Auflager A** wird jeweils ein Momentengelenk eingeschaltet. Als **Unbekannte** werden somit das **Eckmoment** und das **Einspannmoment M_A** gewählt.

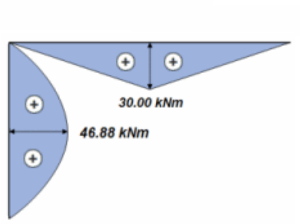
Zustand 0 (Lastzustand)



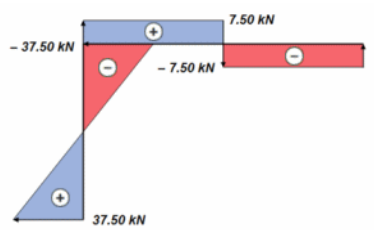
Nachdem das statisch bestimmte Ersatzsystem gewählt wurde, erfolgt die Berechnung der Schnitt- und Auflagerkräfte infolge des Lastzustandes.

Hierbei wird die äußere Belastung am Ersatzsystem angetragen und die Schnittkraftermittlung mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen erarbeitet.

Momentenbild $M_0(x)$



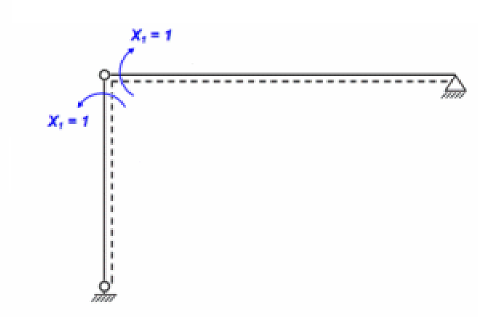
Querkraftbild $Q_0(x)$



Normalkraftbild $N_0(x)$

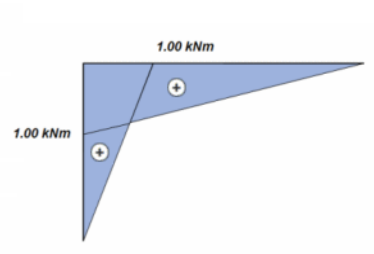
(Ein-) Gelenkrahmen unter horizontaler Streckenlast sowie vertikaler Einzellast

Zustand $X_1 = 1$ (Einheitszustand)

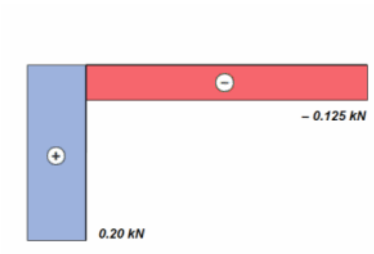


Für alle n Einheitszustände werden nun die Schnittkräfte am Grundsystem berechnet. Die Vorgehensweise ist mit der des Lastzustandes identisch.

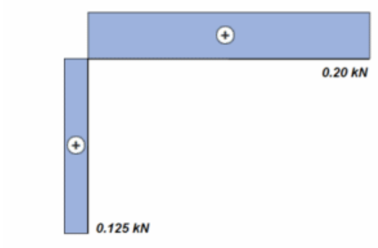
Momentenbild $M_1(x)$



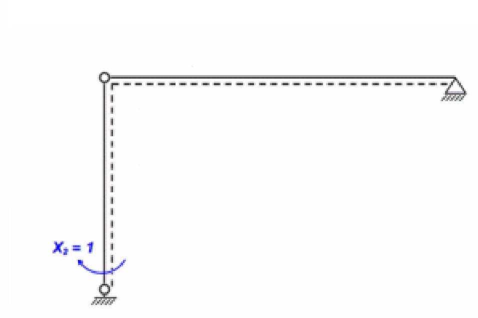
Querkraftbild $Q_1(x)$



Normalkraftbild $N_1(x)$

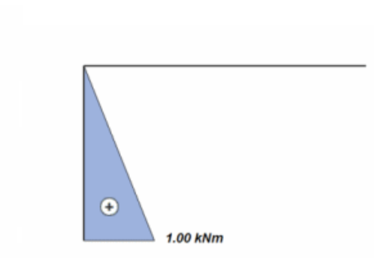


Zustand $X_2 = 1$ (Einheitszustand)

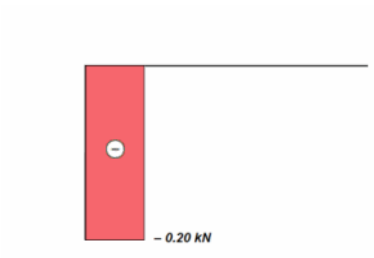


Für alle n Einheitszustände werden nun die Schnittkräfte am Grundsystem berechnet. Die Vorgehensweise ist mit der des Lastzustandes identisch.

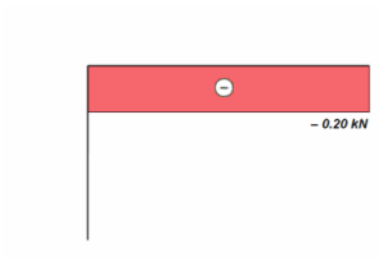
Momentenbild $M_2(x)$



Querkraftbild $Q_2(x)$



Normalkraftbild $N_2(x)$

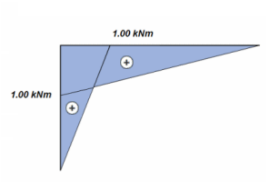


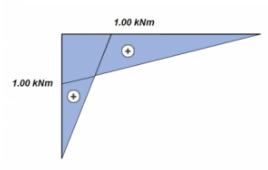
(Ein-) Gelenkrahmen unter horizontaler Streckenlast sowie vertikaler Einzellast

Formänderungsintegrale

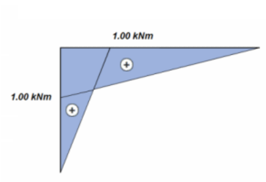
An den n Stellen der eingeführten Einheitslasten werden mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte die EI-fachen Verformungen infolge des Lastzustandes ermittelt. Hierzu werden die Momentenflächen der Zustände Xi = 1 mit sich selbst und mit der des Zustandes 0 integriert.

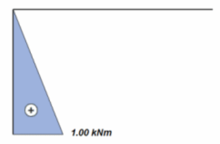
$$EI\delta_{11} = \int M_1(x) \cdot M_1(x) \cdot dx$$
$$EI\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot 1{,}00 \cdot 1{,}00 \cdot 5{,}00 + \frac{1}{3} \cdot 1{,}00 \cdot 1{,}00 \cdot 8{,}00$$
$$EI\delta_{11} = 4{,}33$$



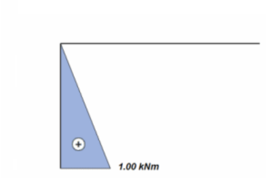


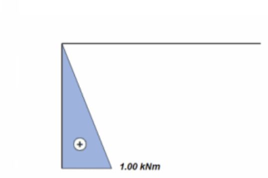
$$EI\delta_{12} = \int M_1(x) \cdot M_2(x) \cdot dx$$
$$EI\delta_{12} = \frac{1}{6} \cdot 1{,}00 \cdot 1{,}00 \cdot 5{,}00$$
$$EI\delta_{12} = 0{,}83$$



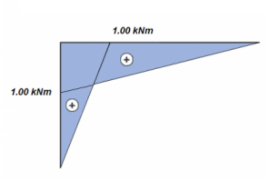


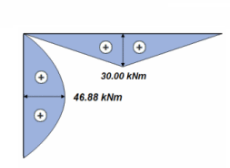
$$EI\delta_{22} = \int M_2(x) \cdot M_2(x) \cdot dx$$
$$EI\delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot 1{,}00 \cdot 1{,}00 \cdot 5{,}00$$
$$EI\delta_{22} = 1{,}67$$



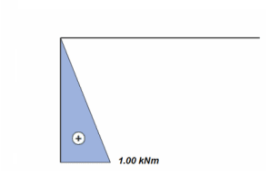


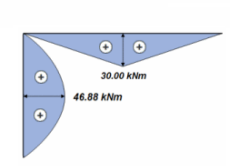
$$EI\delta_{10} = \int M_1(x) \cdot M_0(x) \cdot dx$$
$$EI\delta_{10} = \frac{1}{3} \cdot 1{,}00 \cdot 46{,}88 \cdot 5{,}00 + \frac{1}{4} \cdot 1{,}00 \cdot 30{,}00 \cdot 8{,}00$$
$$EI\delta_{10} = 138{,}13$$





$$EI\delta_{20} = \int M_2(x) \cdot M_0(x) \cdot dx$$
$$EI\delta_{20} = \frac{1}{3} \cdot 1{,}00 \cdot 46{,}88 \cdot 5{,}00$$
$$EI\delta_{20} = 78{,}13$$





(Ein-) Gelenkrahmen unter horizontaler Streckenlast sowie vertikaler Einzellast

Gleichungssystem

Das Gleichungssystem ergibt sich aus den n Verformungsbedingungen, die man an den n Stellen der im statisch unbestimmten System eingeführten Freiheitsgrade formulieren kann.
Die Summe der Verformungen infolge des Lastzustandes und aller Xi-fachen Verformungen aus n Einheitszuständen müssen für jede der n Stellen gleich Null sein. Die Auflösung des Gleichungssystems liefert die unbekannten Kräfte.

$$EI\delta_{11} \cdot X_1 + EI\delta_{12} \cdot X_2 + EI\delta_{10} = 0$$
$$EI\delta_{12} \cdot X_2 + EI\delta_{22} \cdot X_2 + EI\delta_{20} = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} EI\delta_{11} & EI\delta_{12} & -EI\delta_{10} \\ EI\delta_{12} & EI\delta_{22} & -EI\delta_{20} \end{array}\right)$$

$$4{,}33 \cdot X_1 + 0{,}83 \cdot X_2 + 138{,}13 = 0$$
$$0{,}83 \cdot X_2 + 1{,}67 \cdot X_2 + 78{,}13 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4{,}33 & 0{,}83 & -138{,}13 \\ 0{,}83 & 1{,}67 & -78{,}13 \end{array}\right)$$

$$X_1 = -25{,}35 kNm$$
$$X_2 = -34{,}19 kNm$$

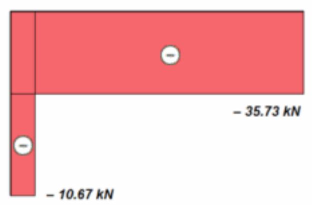
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -25{,}35 \\ 0 & 1 & -34{,}19 \end{array}\right)$$

Superposition

Die endgültigen Schnitt- und Auflagerkräfte des statisch unbestimmten Systems ergeben sich aus der Summe der Größen des Lastzustandes und aller Einheitszustände multipliziert mit der jeweiligen Unbekannten.

Normalkraftbild

$$N = N_0 + X_1 \cdot N_1 + X_2 \cdot N_2$$
$$N_A = -7{,}50kN + (-25.35) \cdot 0{,}125kN + (-34.19) \cdot 0{,}00kN \quad \Leftrightarrow \quad N_A = -10{,}67kN$$
$$N_{Ecke(unten)} = -7{,}50kN + (-25.35) \cdot 0{,}125kN + (-34.19) \cdot 0{,}00kN \quad \Leftrightarrow \quad N_{Ecke(unten)} = -10{,}67kN$$
$$N_{Ecke(rechts)} = -37{,}50kN + (-25.35) \cdot 0{,}20kN + (-34.19) \cdot (-0{,}20kN) \quad \Leftrightarrow \quad N_{Ecke(rechts)} = -35{,}73kN$$
$$N_B = -37{,}50kN + (-25.35) \cdot 0{,}20kN + (-34.19) \cdot (-0{,}20kN) \quad \Leftrightarrow \quad N_B = -35{,}73kN$$



Auflagerkräfte:

V_A = – 10,67 kN
H_B = – 35,73 kN

(Ein-) Gelenkrahmen unter horizontaler Streckenlast sowie vertikaler Einzellast

Querkraftbild

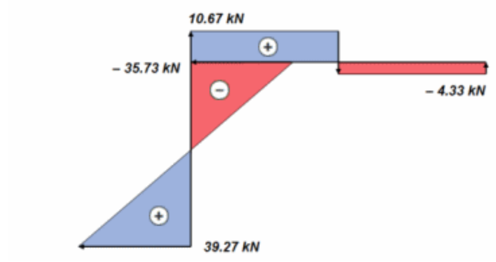
$$Q = Q_0 + X_1 \cdot Q_1 + X_2 \cdot Q_2$$

$$Q_A = 37{,}50\text{kN} + (-25.35) \cdot 0{,}20\text{kN} + (-34.19) \cdot (-0{,}20\text{kN}) \Leftrightarrow Q_A = 39{,}27\text{kN}$$

$$Q_{Ecke(unten)} = -37{,}50\text{kN} + (-25.35) \cdot 0{,}20\text{kN} + (-34.19) \cdot (-0{,}20\text{kN}) \Leftrightarrow Q_{Ecke(unten)} = -35{,}73\text{kN}$$

$$Q_{Ecke(rechts)} = 7{,}50\text{kN} + (-25.35) \cdot (-0{,}125\text{kN}) + (-34.19) \cdot 0{,}00\text{kN} \Leftrightarrow Q_{Ecke(rechts)} = 10{,}67\text{kN}$$

$$Q_B = -7{,}50\text{kN} + (-25.35) \cdot (-0{,}125\text{kN}) + (-34.19) \cdot 0{,}00\text{kN} \Leftrightarrow Q_B = -4{,}33\text{kN}$$



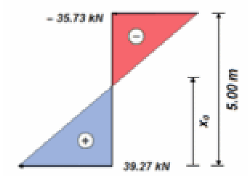
Auflagerkräfte:

H_A = 39,27 kN

H_B = – 4,33 kN

Nulldurchgang der Querkraftlinie:

X_0 = 39,27 kN * (5,00 m / (39,27 kN + 35,73 kN)) ⇔ **X_0 = 1,62 m**



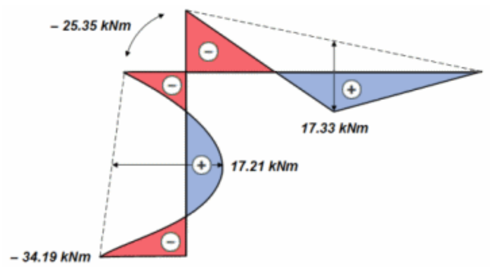
Momentenbild

$$M = M_0 + X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2$$

$$M_A = 0{,}00\text{kNm} + (-25.35) \cdot 0{,}00\text{kNm} + (-34.19) \cdot 1{,}00\text{kNm} \Leftrightarrow M_A = -34{,}19\text{kNm}$$

$$M_{Ecke} = 0{,}00\text{kNm} + (-25.35) \cdot 1{,}00\text{kNm} + (-34.19) \cdot 0{,}00\text{kNm} \Leftrightarrow M_{Ecke} = -25{,}35\text{kNm}$$

$$M_B = 0{,}00\text{kNm} + (-25.35) \cdot 0{,}00\text{kNm} + (-34.19) \cdot 0{,}00\text{kNm} \Leftrightarrow M_B = 0{,}00\text{kNm}$$



Einspannmoment:

M_A = - 34,19 kNm

(Ein-) Gelenkrahmen unter horizontaler Streckenlast sowie vertikaler Einzellast

Maximales Moment im Stiel:

Das maximale Moment wirkt an der Stelle des Nulldurchgangs der Querkraftlinie. Es wird mit Hilfe eines fiktiven Schnittes an der Stelle x_0 berechnet !

M_{max} = – (– 34,19 kNm) + 15,00 kN/m * 2,62 m * 1,31 m – 39,27 kN * 2,62 m

⇔ **M_{max} = 17,21 kNm**

Maximales Moment im Riegel:

Das maximale Moment wird durch Einhängen der Momentenlinie $M_0(x)$ ermittelt !

M_{max} = 0,5 * (– 25,35 kNm) + 30,00 kNm

⇔ **M_{max} = 17,33 kNm**