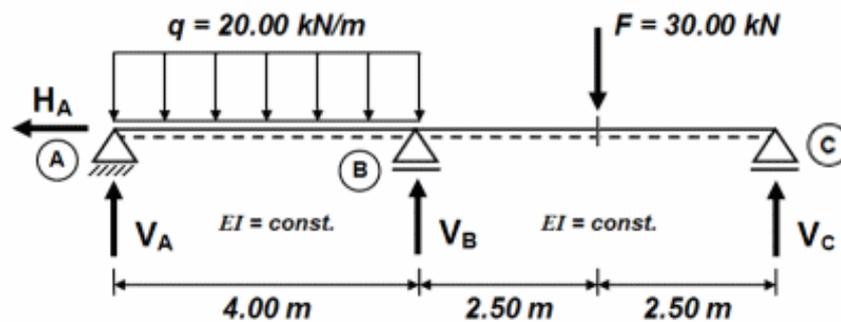


**Zweifeldträger** unter vertikaler Streckenlast sowie vertikaler Einzellast

Auf den folgenden Seiten wird das '**Kraftgrößenverfahren**' ( $X_A$ -Methode) zur Berechnung der Schnittkräfte statischer Systeme am Beispiel eines 1-fach statisch unbestimmten Zweifeldträgers veranschaulicht. Dabei gliedert sich die Berechnung in folgende Schritte:

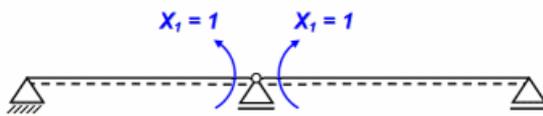
- Systemanalyse: Ermittlung des Grades der statischen Unbestimmtheit
- Herstellen eines statisch bestimmten Grundsystems
- Lastspannungszustand: Antragen der Belastung am Ersatzsystem und Ermittlung der Schnittkräfte
- Eigenspannungszustand: Ermittlung der Schnittgrößen, die durch die Ersatzkräfte hervorgerufen werden
- Berechnung der Verformung infolge des Last- und Eigenspannungszustandes
- Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems
- Ermittlung der endgültigen Zustandslinien durch Superposition

**System und Belastung****Systemanalyse**

Auflagerreaktionen	$a = 4$	} $n = 4 + 3 \cdot (2 - 3) - 0 \Leftrightarrow n = 1$
Stabelemente	$p = 2$	
Knotenpunkte	$k = 3$	
Nebenbedingungen	$r = 0$	

**Zweifeldträger** unter vertikaler Streckenlast sowie vertikaler Einzellast**Statisch bestimmtes Grundsystem**

Zur Berechnung eines n-fach statisch unbestimmten Systems sind n Verformungsbedingungen notwendig. Diese Bedingungen lassen sich durch Wegnahme von Auflagern oder Einführung von Gelenken formulieren. Das System wird in ein statisch bestimmtes Ersatzsystem umgewandelt. An den Stellen der entfernten Lager oder der eingeführten Gelenke werden die am Ursprungssystem wirkenden Kräfte (Einheitskräfte) angesetzt.

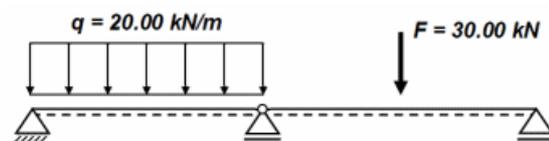
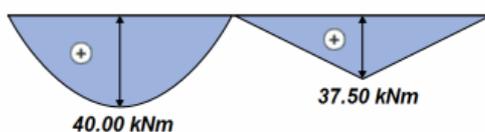
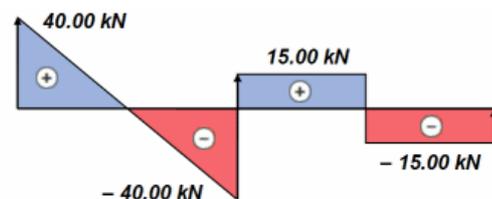


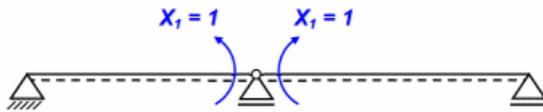
Das statisch bestimmte Ersatzsystem sollte so gewählt werden, dass sich die Schnittkraftermittlung leicht gestaltet und zu Schnittkraftlinien führt, die eine möglichst geringe Integrationsarbeit bei der Verformungsberechnung ergibt.

Am Auflager B wird ein Momentengelenk eingeschaltet. Als **Unbekannte** wird somit das **Stützmoment  $M_B$**  gewählt.

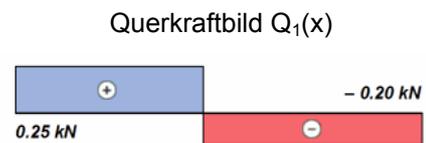
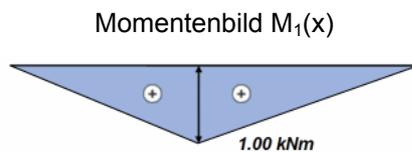
**Zustand 0 (Lastzustand)**

Nachdem das statisch bestimmte Ersatzsystem gewählt wurde, erfolgt die Berechnung der Schnitt- und Auflagerkräfte infolge des Lastzustandes. Hierbei wird die äußere Belastung am Ersatzsystem angetragen und die Schnittkraftermittlung mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen erarbeitet.

Momentenbild  $M_0(x)$ Querkraftbild  $Q_0(x)$ 

**Zweifeldträger** unter vertikaler Streckenlast sowie vertikaler Einzellast**Zustand  $X_1 = 1$  (Einheitszustand)**

Für alle  $n$  Einheitszustände werden nun die Schnittkräfte am Grundsystem berechnet. Die Vorgehensweise ist mit der des Lastzustandes identisch.

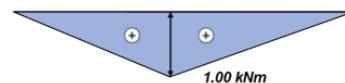
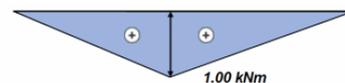
**Formänderungsintegrale**

An den  $n$  Stellen der eingeführten Einheitslasten werden mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte die EI-fachen Verformungen infolge des Lastzustandes ermittelt. Hierzu werden die Momentenflächen der Zustände  $X_i = 1$  mit sich selbst und mit der des Zustandes 0 integriert.

$$EI\delta_{11} = \int M_1(x) \cdot M_1(x) \cdot dx$$

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot 1,00 \cdot 1,00 \cdot 4,00 + \frac{1}{3} \cdot 1,00 \cdot 1,00 \cdot 5,00$$

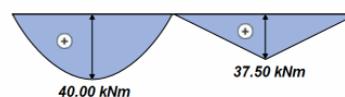
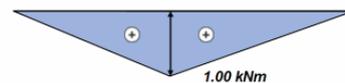
$$EI\delta_{11} = 3,00$$



$$EI\delta_{10} = \int M_1(x) \cdot M_0(x) \cdot dx$$

$$EI\delta_{10} = \frac{1}{3} \cdot 40,00 \cdot 1,00 \cdot 4,00 + \frac{1}{4} \cdot 37,50 \cdot 1,00 \cdot 5,00$$

$$EI\delta_{10} = 100,21$$



**Zweifeldträger** unter vertikaler Streckenlast sowie vertikaler Einzellast**Gleichungssystem**

Das Gleichungssystem ergibt sich aus den  $n$  Verformungsbedingungen, die man an den  $n$  Stellen der im statisch unbestimmten System eingeführten Freiheitsgrade formulieren kann.

Die Summe der Verformungen infolge des Lastzustandes und aller  $X_i$ -fachen Verformungen aus  $n$  Einheitszuständen müssen für jede der  $n$  Stellen gleich Null sein. Die Auflösung des Gleichungssystems liefert die unbekanntenen Kräfte.

$$EI\delta_{11} \cdot X_1 + EI\delta_{10} = 0 \Leftrightarrow X_1 = -\frac{EI\delta_{10}}{EI\delta_{11}} \Leftrightarrow X_1 = -\frac{100,21}{3,00} \Leftrightarrow X_1 = -33,40 \text{ kNm}$$

**Superposition**

Die endgültigen Schnitt- und Auflagerkräfte des statisch unbestimmten Systems ergeben sich aus der Summe der Größen des Lastzustandes und aller Einheitszustände multipliziert mit der jeweiligen Unbekannten.

**Querkraftbild**

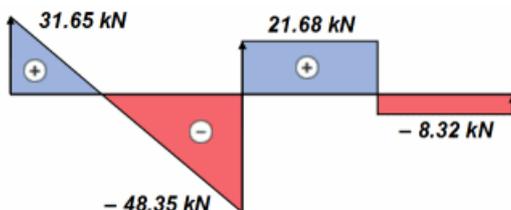
$$Q = Q_0 + X_1 \cdot Q_1$$

$$Q_A = 40,00 \text{ kN} + (-33,40) \cdot 0,25 \text{ kN} \Leftrightarrow Q_A = 31,65 \text{ kN}$$

$$Q_{B(\text{links})} = -40,00 \text{ kN} + (-33,40) \cdot 0,25 \text{ kN} \Leftrightarrow Q_{B(\text{links})} = -48,35 \text{ kN}$$

$$Q_{B(\text{rechts})} = 15,00 \text{ kN} + (-33,40) \cdot (-0,20 \text{ kN}) \Leftrightarrow Q_{B(\text{rechts})} = 21,68 \text{ kN}$$

$$Q_C = -15,00 \text{ kN} + (-33,40) \cdot (-0,20 \text{ kN}) \Leftrightarrow Q_C = -8,32 \text{ kN}$$



Auflagerkräfte:

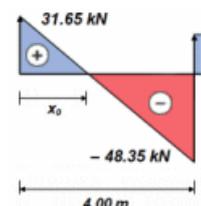
$$V_A = 31,65 \text{ kN}$$

$$V_B = 48,35 \text{ kN} + 21,68 \text{ kN} = 70,03 \text{ kN}$$

$$V_C = 8,32 \text{ kN}$$

Nulldurchgang der Querkraftlinie:

$$X_0 = 31,65 \text{ kN} \cdot \left( \frac{4,00 \text{ m}}{31,65 \text{ kN} + 48,35 \text{ kN}} \right) \Leftrightarrow X_0 = 1,5825 \text{ m}$$



## Zweifeldträger unter vertikaler Streckenlast sowie vertikaler Einzellast

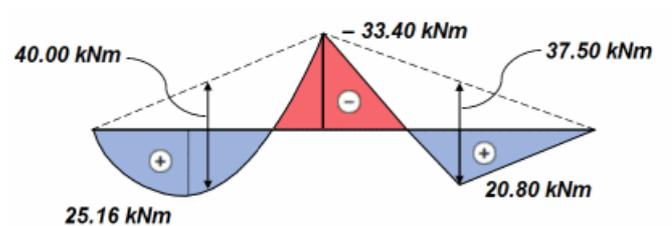
### Momentenbild

$$M = M_0 + X_1 \cdot M_1$$

$$M_A = 0,00 \text{ kNm} + (-33,40) \cdot 0,00 \text{ kNm} \Leftrightarrow M_A = 0,00 \text{ kNm}$$

$$M_B = 0,00 \text{ kNm} + (-33,40) \cdot 1,00 \text{ kNm} \Leftrightarrow M_B = -33,40 \text{ kNm}$$

$$M_C = 0,00 \text{ kNm} + (-33,40) \cdot 0,00 \text{ kNm} \Leftrightarrow M_C = 0,00 \text{ kNm}$$



### Maximales Moment im Bereich A-B:

Das maximale Moment wirkt an der Stelle des Nulldurchgangs der Querkraftlinie. Es wird mit Hilfe eines fiktiven Schnittes an der Stelle  $x_0$  berechnet !

$$M_{\max} = -33,40 \text{ kNm} + 20,00 \text{ kN/m} \cdot 2,42 \text{ m} \cdot 1,21 \text{ m}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{M_{\max} = 25,16 \text{ kNm}}$$

### Maximales Moment im Bereich B-C:

Das maximale Moment wird durch Einhängen der Momentenlinie  $M_0(x)$  ermittelt !

$$M_{\max} = 0,5 \cdot (-33,40 \text{ kNm}) + 37,50 \text{ kNm}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{M_{\max} = 20,80 \text{ kNm}}$$