

Inhaltsverzeichnis

• Kräfte und Kraftarten	
○ Bestimmung von Kräften	Seite 1
○ Graphische Darstellung	Seite 1
○ Einheit der Kraft	Seite 1
○ Kräftegleichgewicht	Seite 1
○ Kraftarten	Seite 2
• Äußere und innere Kräfte	
○ Einteilung der äußeren Kräfte	Seite 3
○ Schnittprinzip / Schnittkräfte (Innere Kräfte)	Seite 3
• Das zentrale Kräftesystem	
○ Kräfteparallelogramm	Seite 4
○ Krafteck	Seite 4
○ Zerlegung von Kräften	Seite 4
• Momente	
○ Erläuterung	Seite 5
○ Definition	Seite 5
• Auflager	
○ Bewegliche Auflager	Seite 6
○ Feste Auflager	Seite 6
○ Fest eingespannte Auflager	Seite 6
• Zustandslinien	
○ Allgemein	Seite 7
○ Horizontale und vertikale Einzellasten	Seite 7
○ Gleichmäßig verteilte Streckenlast	Seite 8
○ Einzelmoment	Seite 9
○ Zusammenhänge	Seite 10
• Statische (Un-)Bestimmtheit	
○ Abzählkriterium	Seite 11
○ Beispiele statisch bestimmter Systeme	Seite 12
○ Beispiele statisch unbestimmter Systeme	Seite 12
○ Beispiele statisch instabiler Systeme	Seite 13
• Lastannahmen	
○ Ständige Lasten / Verkehrslasten	Seite 14
○ Rechenwerte für Eigenlasten	Seite 14

Kräfte und Kraftarten

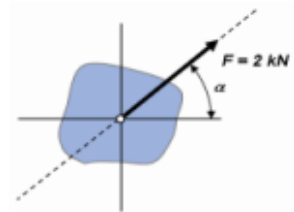
Kräfte sind nicht direkt wahrnehmbar. Sie können nur anhand ihrer Wirkung erkannt und gemessen werden. Kräfte sind vektorielle Größen. Zu ihrer eindeutigen Bestimmung sind demnach drei Angaben notwendig, nämlich Größe, Richtung und Angriffspunkt.

Die **Bestimmung von Kräften** erfolgt durch:

- Zahlenangaben (notwendig für analytische Lösungen) oder
- zeichnerische Angaben (notwendig für zeichnerische Lösungen unter Verwendung von Kräfteplänen) oder
- eine gemischte Darstellungsform zur größeren Übersichtlichkeit und als anschauliches Hilfsmittel für Lösungsansätze.

Zur **graphischen Darstellung** sollten folgende Vorgaben eingehalten werden:

- Die Größe der Kraft wird durch die Zahlenangabe oder durch die Länge des Kraftpfeils unter Verwendung eines Kräftemaßstabes (z.B. 1cm Pfeillänge entspricht 1kN) dargestellt.
- Die Richtung der Kraft wird durch die Pfeilspitze festgelegt.
- Die Lage der Kraft wird durch den Angriffspunkt der Kraft oder durch die Gerade, in der der Kraftvektor liegt (Wirkungslinie) bestimmt.

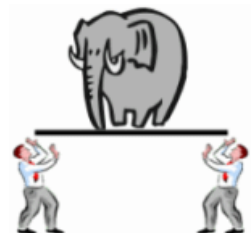


Die **Einheit der Kraft** Newton [N] beruht auf der Grundlage des Systems der Internationalen Einheiten (SI). Ein Newton ist die Kraft, die der Masse 1 kg eine Beschleunigung von 1 m/s² erteilt.

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

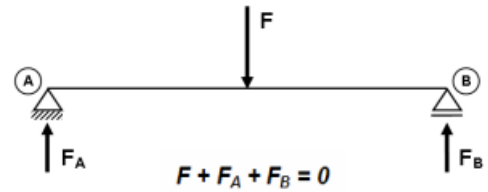
Eine Kraft, die auf einen Körper einwirkt, bewirkt eine Bewegungsänderung des Körpers, an dem sie angreift, solange der Körper nicht durch eine andere Kraft im **Gleichgewicht** gehalten wird.

Für den Gleichgewichtszustand muss demnach noch mindestens eine zweite Kraft in der gleichen Wirkungslinie und der gleichen Größe, aber entgegengesetzter Richtung vorhanden sein. Der **angreifenden (aktiven) Kraft** wird durch eine **widerstehende (passive) Kraft** das Gleichgewicht gehalten. Das Gleichgewicht kann auch durch mehrere Kräfte hergestellt werden.



Kräfte und Kraftarten

Im dargestellten Beispiel wirkt auf den symbolischen Träger die Kraft F (**Aktionskraft**). Dadurch entstehen in den Lagerpunkten die passiven Kräfte F an den Stellen A und B (**Reaktionskräfte**). Soll der Träger in Ruhe bleiben, so müssen die drei Kräfte im Gleichgewicht stehen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, würde der Träger beschleunigt.



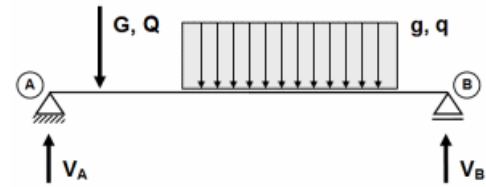
Kräfte, die auf ein Tragwerk einwirken, können in unterschiedlichen Formen auftreten:

Bezeichnung	Darstellung	Beschreibung	Einheiten
Punktkraft		Die Kraft greift an nur einem Punkt an. Idealisierte Kraftform, die sehr häufig Verwendung findet.	[N] [kN]
Linienkraft		Kraft je Längeneinheit. Die Kräfte wirken entlang einer Linie. Idealisierte Kraftform, die sehr häufig Verwendung findet.	[N/m] [kN/m]
Flächenkraft		Kraft je Flächeneinheit. Angriffspunkt der Kraft ist die Fläche. Für Berechnungen wird die Flächenkraft meist in eine Linienkraft umgeformt.	[N/m ²] [kN/m ²]
Volumenkraft		Kraft je Volumeneinheit. Wirkt räumlich verteilt an allen Elementen eines Körpers infolge von Beschleunigungen.	[N/m ³] [kN/m ³]

Äußere und innere Kräfte

Zu den äußeren Kräften eines Bauwerks zählen die als Aktionen auf das Tragwerk einwirkenden Lasten sowie die daraus Resultierenden Stütz- und Auflagerkräfte als Reaktionen. Alle äußeren Kräfte an einem Bauteil müssen untereinander im Gleichgewicht stehen.

Ihre Ursache liegt in den Eigenlasten, im 'Betriebszustand' und/oder in den physikalischen und chemischen Veränderungen der Baustoffe oder des Baugrundes.



Die äußeren Kräfte werden in **ständige Lasten** und **Verkehrslasten** unterteilt:

Ständige Lasten	Verkehrslasten
<ul style="list-style-type: none"> • Ständige Lasten sind die Lasten der Baukörper selbst (Eigenlasten) • Sie sind im Bauwerk dauernd vorhanden • Sie werden mit G (für Einzellasten) und g (für verteilte Lasten) bezeichnet 	<ul style="list-style-type: none"> • Verkehrslasten sind bezüglich Größe und Angriffspunkt veränderlich • Sie rühren aus den Eigenlasten von Personen, Fahrzeugen, Einrichtungsgegenständen, Schnee, usw. • Sie werden mit Q (für Einzellasten) und q (für verteilte Lasten) bezeichnet.

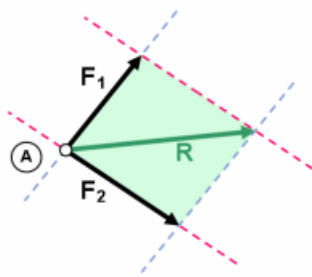
Infolge der Wirkung der äußeren Kräfte entstehen im Inneren des Bauteils Kräfte, die man in Form von Schnittkräften (Schnittgrößen) ermittelt.

Zur Ermittlung der Schnittkräfte wird das Tragwerk im betrachteten Querschnitt durch einen gedanklichen Schnitt getrennt. Zur Herstellung des Gleichgewichts an den beiden Tragwerksteilen müssen an den jeweiligen Schnittufern zusätzlich zu den vorhandenen äußeren Kräften noch die inneren Kräfte N, M und Q eingeführt werden. Hierbei steht N für Normalkraft (oder Längs- bzw. Axialkraft), M für Biegemoment und Q für Querkraft.

Durch das Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen ist es möglich, die wirkenden Beanspruchungen an jeder beliebigen Stelle des Systems zu bestimmen. Die ermittelten Werte bilden die Grundlage für anschließende Bemessungsverfahren.

Gedachter Schnitt	Darstellung der Schnittkräfte

Das zentrale Kräftesystem

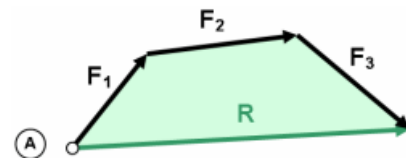


Kräfteparallelogramm

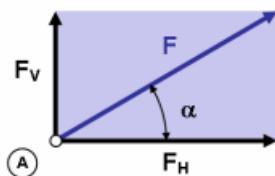
Greifen in einem Punkt A zwei Kräfte F_1 und F_2 an, kann mit Hilfe des von ihnen aufgespannten Parallelogramms die resultierende Kraft R ermittelt werden. Die Resultierende greift ebenfalls in A an und wirkt in der Ebene der beiden Kräfte F_1 und F_2 .

Krafteck

Mit Hilfe des Kraftecks lässt sich die Resultierende R von beliebig vielen Kräften ermitteln, die in einem Punkt angreifen. Hierzu wird jede Kraft mit ihrem „Fußende“ an die Kraftspitze der vorangegangenen Kraft angeschlossen. Die Resultierende R schließt das Krafteck in Betrag und Richtung.



Zerlegung von Kräften



Ansätze für analytische Betrachtungen können grundsätzlich aus den geometrischen Beziehungen der zeichnerischen Lösung hergeleitet werden. Eine zweckmäßige Möglichkeit zur Zerlegung von Kräften ist die Aufteilung in ihre Horizontal- bzw. Vertikalkomponenten. Hierbei gilt: $F_H = F \cdot \cos \alpha$ bzw. $F_V = F \cdot \sin \alpha$.

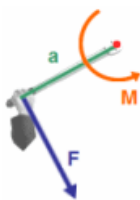
Momente

Erläuterung:

Die Definition des Momentes lässt sich zweckmäßig mit der Wirkungsweise eines **Drehmomentschlüssels** (→) erläutern. Mit seiner Hilfe werden Schrauben mit einem bestimmten Anzugsmoment befestigt.



Definition:



Die Kraft F (Mensch) greift am Lastangriffspunkt an (Stielende des Drehmomentschlüssels). Sie bewirkt eine Drehung des Bezugspunktes (Schraube). Die Kraft, mit der die Schraube gedreht wird (Moment) ist abhängig von der Größe der angreifenden Kraft, sowie deren Hebelarm bezüglich des Drehpunktes. Somit ergibt sich für das Moment folgende Definition:

Das **Moment einer Kraft** in Bezug auf einen Punkt ist das Produkt aus dem absoluten **Betrag der Kraft** und dem **senkrechten Abstand** ihrer Wirkungslinie vom Bezugspunkt. Den Abstand a bezeichnet man als **Hebelarm**. Entsprechend dem Produkt aus Kraft und Länge ergibt sich die **Einheit** des Moments, z.B. Nm oder kNm.

$$\text{Moment} = \text{Kraft} * \text{Hebelarm} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{M} = |\mathbf{F}| * a$$

Die mathematisch korrekte Definition lautet: $|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}| \times a$

„Der Betrag des Drehmomentes ist gleich dem Vektorprodukt aus dem Betrag der angreifenden Kraft und dem senkrechten Abstand ihrer Wirkungslinie vom Drehpunkt.“

Auflager

Bewegliche Auflager



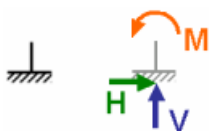
Bewegliche Auflager erlauben Drehungen des Tragwerks um den Lagerpunkt und Verschiebungen in Richtung der Bewegungsbahn. Gesperrt wird die Verschiebung senkrecht zur Bewegungsbahn. Da sie einen Freiheitsgrad aufheben, werden sie als **einwertig** bezeichnet.

Feste Auflager oder Auflagergelenke



Feste Auflager oder Auflagergelenke erlauben wie die beweglichen Auflager eine Drehbarkeit um den Auflagerpunkt. Jedoch unterbinden sie die horizontale und vertikale Verschiebungsmöglichkeit. Da das feste Auflager zwei Freiheitsgrade aufhebt, wird es als statisch **zweiwertig** bezeichnet.

Fest eingespannte Auflager



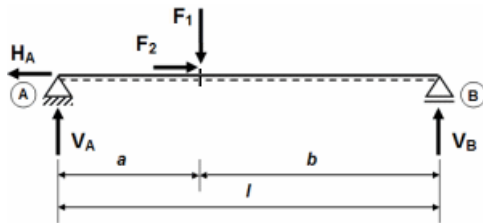
Bei eingespannten Auflagern wird jede Bewegungsmöglichkeit (Drehung und Verschiebung) gesperrt. Da sie drei Freiheitsgrade aufheben, werden sie als **dreiwertig** bezeichnet.

Zustandslinien

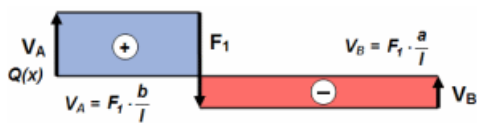
Allgemein

Im folgenden sollen die Darstellungsform für Zustandslinien deutlich gemacht und Zusammenhänge zwischen Normalkraft-, Querkraft- und Momentenlinie veranschaulicht werden. Um die Grundlagen zu verdeutlichen, werden die Zustandslinien für den Träger auf zwei Stützen (Einfeldträger) aufgrund von Einzellasten, Streckenlasten und Einzelmomenten dargestellt. Mit den damit bekannten Verfahrensweisen und Reglementierungen können beliebige Beispiele eigenständig erarbeitet werden.

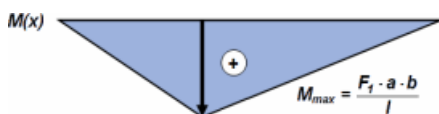
Horizontale und vertikale Einzellasten



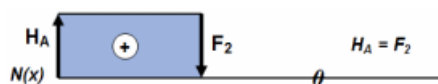
Am links dargestellten System (Einfeldträger) greifen die vertikale Kraft F_1 und die horizontale Kraft F_2 an. Um den daraus resultierenden Kräfteverlauf im Tragwerk darzustellen, werden die Querkraft-, Momenten- und Normalkraftlinie bestimmt:



Querkräfte sind Schnittkräfte senkrecht zur Stabachse. Sie werden durch äußere Belastungen senkrecht zur Stabachse hervorgerufen. Im Beispiel sind dies die äußere Belastung F_1 und die daraus resultierenden Auflagerkräfte V_A und V_B . Die **Querkraftlinie** verläuft in unbelasteten Intervallen parallel zur Bezugsachse und hat unter Einzellasten einen Sprung vom Betrag der Einzelkraft.



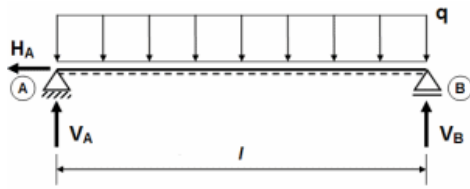
Die **Momentenlinie** verläuft in unbelasteten Intervallen geradlinig, und erfährt unter einer senkrecht zur Stabachse wirkenden Einzellast einen Knick. Da die beiden Auflager A und B keine Momente aufnehmen können, ist das Moment hier gleich Null.



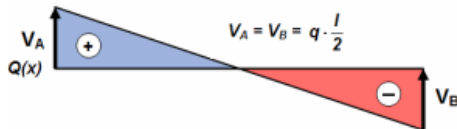
Normalkräfte sind Schnittkräfte parallel zur Stabachse. Sie werden durch äußere Belastungen parallel zur Stabachse hervorgerufen. Im Beispiel sind dies die äußere Belastung F_2 sowie die Auflagerkraft H_A . Die **Normalkraftlinie** verläuft in unbelasteten Intervallen parallel zur Bezugsachse und hat unter Einzellasten einen Sprung vom Betrag der Einzelkraft.

Zustandslinien

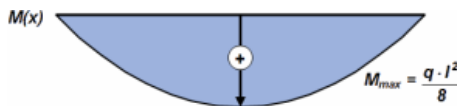
Gleichmäßig verteilte Streckenlast



Am links dargestellten System (Einfeldträger) greift die vertikale Streckenlast q an. Um den daraus resultierenden Kräfteverlauf im Tragwerk darzustellen, werden die Querkraft-, Momenten- und Normkraftlinien bestimmt:



Querkräfte sind Schnittkräfte senkrecht zur Stabachse. Sie werden durch äußere Belastungen senkrecht zur Stabachse hervorgerufen. Im Beispiel sind dies die äußere Belastung q , sowie die daraus resultierenden Auflagerkräfte V_A und V_B . Die **Querkraftlinie** verläuft als zur Bezugsachse geneigte Gerade.



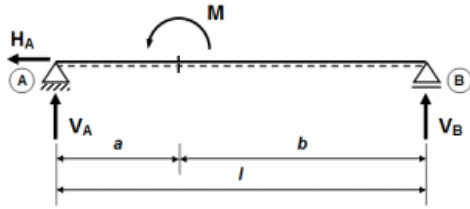
Unter einer Streckenlast verläuft die **Momentenlinie** als quadratische Parabel. Das maximale Moment befindet sich in der Trägermitte, wo auch die Querkraftlinie ihren Nulldurchgang hat. Da die beiden Auflager A und B keine Momente aufnehmen können, ist das Moment hier gleich Null.



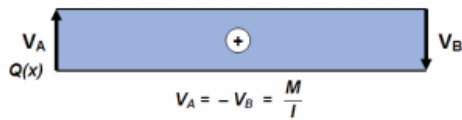
Da auf den dargestellten Träger keine Belastung parallel zur Stabachse einwirkt, ist auch die **Normkraftlinie** konstant gleich Null. Die horizontale Auflagerkraft H_A ist demnach ebenfalls gleich Null.

Zustandslinien

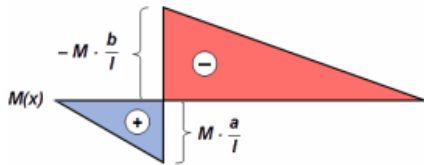
Einzelmoment



Am links dargestellten System (Einfeldträger) greift das Einzelmoment M an. Um den daraus resultierenden Kräfteverlauf im Tragwerk darzustellen, werden die Querkraft-, Momenten- und Normkraftlinien bestimmt:



Die aus einem Einzelmoment resultierende Querkraft ist über die gesamte Trägerlänge konstant. Die Querkraftlinie verläuft demnach parallel zur Bezugsachse.



Die Momentenlinie verläuft als zur Bezugsachse geneigte Geraden, und hat einen Sprung der Größe M an der Stelle, an der das Moment angreift. Da die beiden Auflager A und B keine Momente aufnehmen können, ist das Moment hier gleich Null.

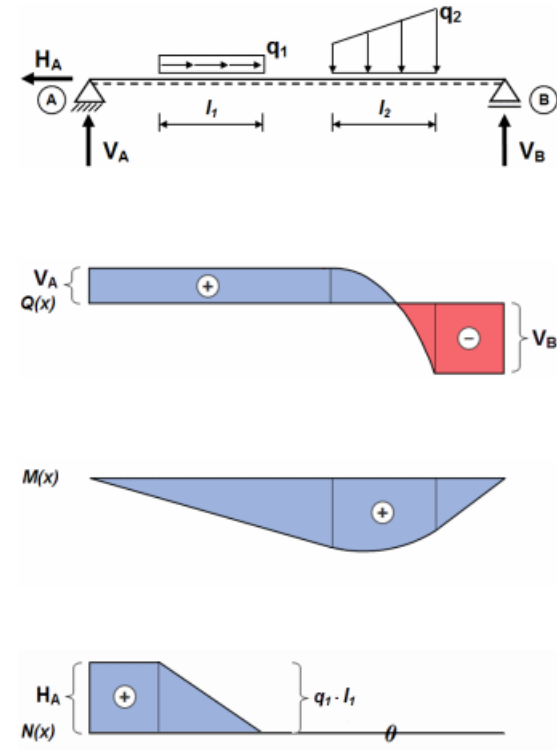
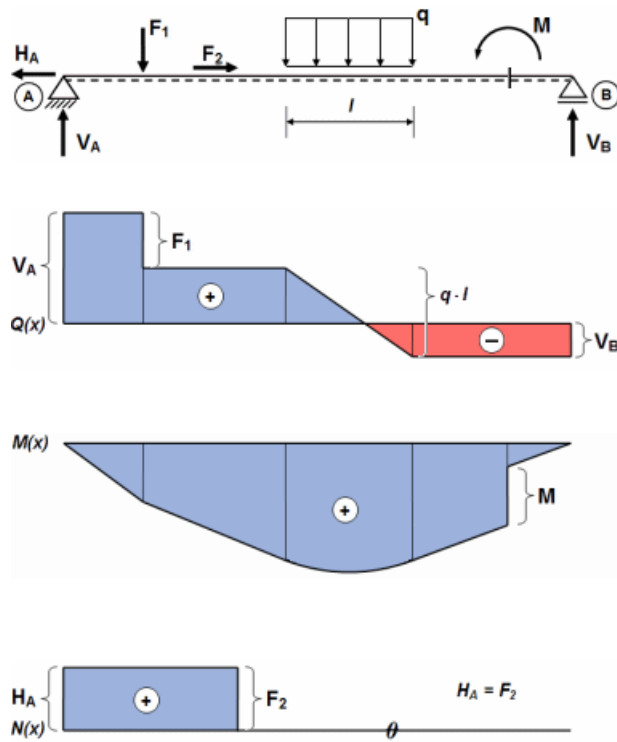


Da auf den dargestellten Träger keine Belastung parallel zur Stabachse einwirkt, ist auch die Normkraftlinie konstant gleich Null. Die horizontale Auflagerkraft H_A ist demnach ebenfalls gleich Null.

Zustandslinien

Zusammenhänge zwischen Querkraft-, Normalkraft- und Momentenlinien

Die auf den vorangegangenen Seiten erläuterten Zusammenhänge zwischen Kraftgrößen und Schnittgrößen sind hier für häufig vorkommende Belastungen in qualitativen Darstellungen der Zustandslinien zusammengefaßt.



Statische (Un-)Bestimmtheit

Die Analyse statischer Systeme befaßt sich mit der Bestimmung des Grades der statischen (Un-) Bestimmtheit. Das Verfahren wird mit Hilfe des Abzählkriteriums erläutert. Hierbei werden nur Sonderformen für ebene Stabwerke und ideale, ebene Fachwerke betrachtet.

Abzählkriterium

Die abgeleiteten Formeln des Abzählkriteriums lauten für:

- Ebene Stabwerke: $n = a + 3 * (p - k) - r$
- Ideale, ebene Fachwerke: $n = a + p - 2 * k$

In den Formeln bedeuten:

- a Summe der möglichen Auflagerreaktionen
- p Summe aller Stabelemente zwischen k Knotenpunkten
- k Summe aller Knotenpunkte einschließlich der Auflagerreaktionen
- r Summe aller Nebenbedingungen (ohne Auflagerknoten) mit $r = n - 1$, wobei n der Anzahl der gelenkig angeschlossenen Stäbe entspricht

Grad der statischen (Un)bestimmtheit

Der Grad der statischen Unbestimmtheit ergibt sich nach durchgeführter Systemanalyse wie folgt:

- $n = 0$ Das System ist statisch bestimmt.
- $n > 0$ Das System ist n-fach statisch unbestimmt.
- $n < 0$ Das System ist kinematisch verschieblich.

Im folgenden werden Systemanalysen an statisch bestimmten und statisch unbestimmten Systemen vorgeführt.

Statische (Un-)Bestimmtheit

Statisch bestimmte Systeme

Einfeldträger



$$a = 3 \quad p = 1 \quad k = 2 \quad r = 0$$

$$n = 3 + 3 \cdot (1 - 2) - 0 = 0$$

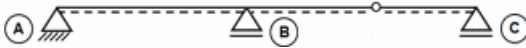
Einfeldträger mit Kragarm (Kragträger)



$$a = 3 \quad p = 2 \quad k = 3 \quad r = 0$$

$$n = 3 + 3 \cdot (2 - 3) - 0 = 0$$

Zweifeldträger mit Gelenk



$$a = 4 \quad p = 3 \quad k = 4 \quad r = 1$$

$$n = 4 + 3 \cdot (3 - 4) - 1 = 0$$

Kragarm



$$a = 3 \quad p = 1 \quad k = 2 \quad r = 0$$

$$n = 3 + 3 \cdot (1 - 2) - 0 = 0$$

Statisch unbestimmte Systeme

Durchlaufträger (Zweifeldträger)



$$a = 4 \quad p = 2 \quad k = 3 \quad r = 0$$

$$n = 4 + 3 \cdot (2 - 3) - 0 = 1$$

Einseitig eingespannter Kragträger



$$a = 4 \quad p = 2 \quad k = 3 \quad r = 0$$

$$n = 4 + 3 \cdot (2 - 3) - 0 = 1$$

Einseitig eingespannter Einfeldträger



$$a = 5 \quad p = 1 \quad k = 2 \quad r = 0$$

$$n = 5 + 3 \cdot (1 - 2) - 0 = 2$$

Beidseitig eingespannter Einfeldträger



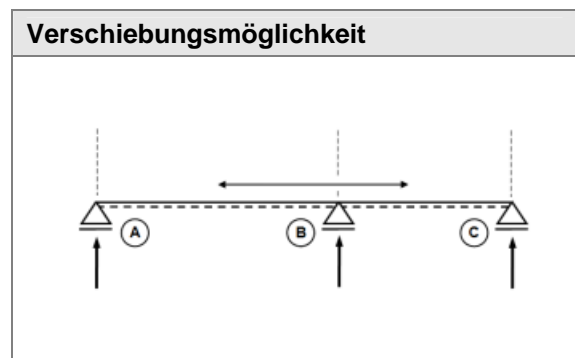
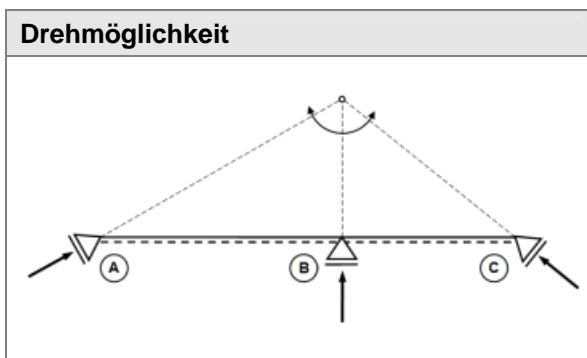
$$a = 6 \quad p = 1 \quad k = 2 \quad r = 0$$

$$n = 6 + 3 \cdot (1 - 2) - 0 = 3$$

Statische (Un-)Bestimmtheit**Statisch instabile Systeme**

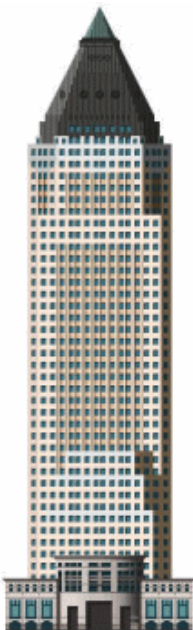
Die Wirkungslinien der Auflagerkräfte einer statischen Konstruktion dürfen sich nicht in einem Punkt schneiden, da sonst eine Drehung der Konstruktion um diesen Punkt möglich wäre. Desweiteren dürfen die Wirkungslinien nicht alle parallel sein, da eine Verschiebung senkrecht zu den Wirkungslinien möglich wäre. Es gilt: **Instabile Tragwerke sind in der Baustatik nicht zulässig !**

Beispiele: **Statisch instabile Systeme**



Lastannahmen

Die Lastermittlung steht am Anfang der statischen Berechnung jedes Bauwerks. Die Größen der anzunehmenden Lasten sind in DIN-Vorschriften angegeben. Sie sind abhängig von Baustoffen und Art der Bauwerke, und können nicht beliebig gewählt werden. Die grundlegende Vorschrift für Belastungsannahmen ist die DIN 1055, „Lastannahmen für Bauwerke“, in der die am häufigsten gebrauchten und allgemein zu verwendenden Lasten festgelegt sind. Alle Kräfte, die auf ein Bauteil einwirken, haben ihre Ursache in Eigenlasten, chemischen oder physikalischen Veränderungen der Baustoffe oder des Baugrundes und dem Betriebszustand. Im einzelnen unterscheidet man dabei:



Ständige Lasten:

Die ständige Last ist die Summe aller unveränderlichen Lasten. Diese sind die Eigenlasten der tragenden Bauteile (beispielsweise Stahlbetondecke) und die von ihnen dauernd aufzunehmenden Lasten (z.B. Estrich, Fußbodenbelag). Die ständige Last ist in ihrer Größe abhängig von den verwendeten Baustoffen.

Verkehrslasten:

Die Verkehrslast ist die veränderliche oder bewegliche Belastung des Bauteils. Sie ersetzt die Lasten von Personen, Einrichtungsgegenständen, Lagerstoffen, Fahrzeugen, Schnee und Wind. Die Verkehrslast ist in ihrer Größe abhängig vom Nutzungszweck des Gebäudes und als Wind- bzw. Schneelast abhängig von Form und geographischer Lage des Gebäudes.

↑ Worldwide Plaza, New York City © Damien's Skyscraper Page: <http://members.iinet.net.au/~paulkoh/>

Im folgenden finden Sie eine Auflistung der **Rechenwerte für Eigenlasten** häufig verwendeter Baustoffe (Quelle: Schneider, Bautabellen für Ingenieure, 13. Auflage):

Holz und Holzwerkstoffe	Beton und Mörtel
<ul style="list-style-type: none"> Nadelholz 4,0 bis 6,0 kN/m³ Laubholz 6,0 bis 8,0 kN/m³ Spanplatten 5,0 bis 7,5 kN/m³ 	<ul style="list-style-type: none"> Normalbeton 23,0 bis 24,0 kN/m³ Stahlbeton 25,0 kN/m³ Zementmörtel 21,0 kN/m³
Mauerwerk	Dacheindeckungen
<ul style="list-style-type: none"> Mauerziegel 7,0 bis 20,0 kN/m³ Kalksandstein 10,0 bis 22,0 kN/m³ Porenbeton 4,5 bis 11,0 kN/m³ 	<ul style="list-style-type: none"> Betondachsteine 0,50 bis 0,65 kN/m² Biberschwänze 0,60 bis 0,70 kN/m² Falzziegel 0,55 kN/m²